E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2º CURSO Y ADAPTACIÓN 2009/2010

PRÁCTICA 3

3.1

(i) Comprobar que si $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ en un abierto $E \subseteq \mathbb{C}$ entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ contenido en E.

(ii) Calcular, con la definición de integral curvilinea, $\int_\gamma \frac{dz}{z}$; $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

(iii) ¿ Tiene la función $f(z) = \frac{1}{z}$ primitiva en $E = \{z \in \mathbb{C}\, ,\, z \neq 0\}$? Justifíquese la respuesta.

(iv) Supóngase que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en el punto $1+2i$. Considérese la $B(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\, ,\, |z| < r\}$. ¿ Qué se puede asegurar sobre: la convergencia, la convergencia absoluta y la convergencia uniforme de la serie en $B(0,r)$ si: a) $r < \sqrt{5}$; b) $r = \sqrt{5}$; c) $r > \sqrt{5}$?
$\operatorname{Res}(f(z), a) = \lim\limits_{z\to a} \frac{d}{dz}((z-a)^2 f(z))$.

(v) Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ siendo γ un camino contenido en $D = \{z \in \mathbb{C};\, |z| > 0,\, -\pi < arg(z) < \pi\}$ y que une el punto $-8i$ con $8i$.

(vi) Se define la función$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante la fórmula $f(a) = \int_\gamma z^2 dz$ siendo γ con origen en 0 y final en a. Se pide:

- (a) Demostrar que la integral no depende del camino elegido.
- (b) Calcular $f(i)$ y $f'(i)$.

(vii) Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que el módulo de $f(z)$ es igual a $\pi/2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Ha de ser f constante? Razone la respuesta.

(viii) Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ cuyos ceros son todos simples. Sea γ un camino cerrado y simple en $\mathbb{C}$ que encierra N ceros de f. Calcular: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

3.2

(i) Hallar α para que $u(x,y) = 3x^2y + \alpha x^2 - y^3 - 2y^2$ pueda ser la parte real de alguna función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Calcular $f(z)$ tal que $f(0) = 0$.

(ii) Calcular el residuo de f en su singularidad, siendo f la transformación de Moebius (bilineal, homográfica) tal que $f(i) = 0, f(0) = i/4, f(\infty) = i/2$. Calcular también el residuo de f' en su singularidad.

(iii) Se considera el camino $\gamma(t) = 1 + (3 + 2t - t^2)e^{2\pi i t}$, siendo $t \in [0,2]$. Se pide:

- (a) Comprobar que el camino es cerrado.
- (b) Calcular, utilizando la definición, el índice de γ respecto del punto $z = 1$.
- (c) Calcular $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z^3\cos(\pi z^2)}{z-1} dz$.

(iv)
- (a) ¿ Dónde es derivable la función: $f(z) = \dfrac{\pi^2 z^2 - z^4}{(e^z + e^{-z})(1-\cos^2 z)}$?
- (b) Calcular, para dicha función, $I = \int_\gamma f(z)dz$, siendo $\gamma(t) = \frac{7}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

3.3

(i) Dada la curva γ definida por el cuadrado de vértices (2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2), calcular las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_\gamma \frac{z^2 dz}{(\pi + z)(z - i)} \quad \text{recorrida } \gamma \text{ dos veces en sentido negativo,}$$
$$I_2 = \int_\gamma \frac{e^{\cos z} dz}{(9 - z^2)(z + \pi)} \quad \text{recorrida } \gamma \text{ una vez en sentido positivo,}$$
$$I_3 = \int_\gamma \frac{z dz}{\overline{z}} \quad \text{recorrida } \gamma \text{ una vez en sentido positivo.}$$

(ii) Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - i} \quad , \quad \gamma(t) = t \quad , \quad -1 \le t \le 1 \quad ; \quad \int_\gamma \frac{dz}{z - i} \quad , \quad \gamma(t) = t + i2(1 - t^2) \quad , \quad -1 \le t \le 1$$

(iii) Siendo $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$, calcular las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_\gamma (z^3 + 2z^2 + 1)e^{\frac{1}{z}} dz \quad ; \quad I_2 = \int_\gamma \overline{z} dz \quad ; \quad I_3 = \int_\gamma (z^5 + 2z^2) \cos^2(z) dz$$

(iv) Dada $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2 \cos z}{(1 - z^2)(z - 3i) \operatorname{sen}^2 z} dz$ se pide:

(a) Calcular I siendo: $\gamma(t) = 6e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$.

(b) Calcular I siendo: $\gamma(t) = \frac{1}{6}e^{it}$, $-2\pi \le t \le 6\pi$.

(v) Calcular las integrales $\displaystyle\int_\gamma \frac{1 - 4z}{(1 - z)^2(1 - 2z)} dz$, $\displaystyle\int_\gamma z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ siendo $\gamma(t) = \frac{3}{4}e^{it}$ y $t \in [0, 2\pi]$.

(vi) Sea $\gamma(t) = 6e^{it}$, $t \in [0, 6\pi]$, se pide:

(a) Calcular $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-5i)^2} dz$ siendo $f(z)$ una función holomorfa en el plano complejo, tal que su derivada se anula en el punto $z = 5i$.

(b) Estudiar la holomorfía de la función $f(z) = 5|z|^2$ y calcular $\int_\gamma 5|z|^2 dz$.

(vii) Calcular la integral: $\displaystyle\int_\gamma \frac{i(e^z + e^{-z})^{-1}}{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z} dz$ siendo γ la frontera del dominio: $D = \{(x, y); y \le 6 - x^2 , y \ge x^2\}$ recorrida una vez en sentido positivo.

3.4

(i) Sea $\gamma(t) = 6e^{it}$, $t \in [0, 6\pi]$. Calcular: $\displaystyle\int_\gamma (z - 5)e^{\frac{2}{(z-5)^2}} dz$.

(ii) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ para $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, sabiendo que $f'(z) = z^4 \cos(\frac{5}{z})$.

(iii) Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{e^z + 1} dz$ donde γ es el contorno del cuadrado de lados paralelos a los ejes X e Y centrado en el origen, recorrido una vez en sentido positivo y de semilado $a = 1, 2, 3, 4$.

(iv) Lo mismo que en (iii), para la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{e^{2z}+2e^z+1}dz$

(v) Sea $f(z) = \dfrac{e^{z+3i}}{(z+3i)^4}$, se pide: A) Desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z+3i| < \infty$, B) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ siendo γ el cuadrado de lado 10, centrado en el origen, de lados paralelos a los ejes y recorrido una vez en sentido positivo.

3.5

(i) Calcular y representar gráficamente (en esbozo) la imagen de $S = \{z = x+iy;\ x^2+y^2+2x \leq 0\}$ por las siguientes transformaciones: a) $T_1(z) = z-2$, b) $T_2(z) = \frac{1}{z-2}$, c) $T_3(z) = \frac{z-3}{z-2}$

(ii) (a) Calcúlese la imagen mediante la función z^2 del conjunto $\{z \in \mathbb{C};\ |arg(z)| \leq \pi/4\}$

(b) ¿ Existe una aplicación holomorfa compleja que transforme $\{z \in \mathbb{C};\ |arg(z)| \leq \pi/4\}$ en $\{z \in \mathbb{C};\ |z+1| \leq 1\}$?

(iii) Encontrar todas las homografías que transformen el disco de centro 0 y radio 1 en sí mismo.

3.6

(i) La función $\operatorname{th}(z) = \operatorname{senh}(z)/\cosh(z)$ (tangente hiperbólica) ¿ Donde es derivable ?

(ii) La misma cuestión del apartado (i) para la función $f(z) = \dfrac{2\operatorname{th}(z)}{e^z(\cos(z)-1)}$

(iii) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ siendo $f(z)$ como en (ii) y $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 4\pi]$

(iv) Calcular las integrales: $\int_\gamma f(z)dz$, $\int_\gamma g'(z)dz$ siendo f y g transformaciones bilineales, $\gamma(t) = 2+e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, sabiendo que f transforma la circunferencia de centro $1+i$ y radio 8 en una recta y que $g(2) = \infty$.

3.7

(i) De una transformación bilineal, f, sabemos que tiene un punto fijo con parte imaginaria negativa, que lleva la circunferencia $|z-5i| = 2$ sobre si misma y que $f(-2+5i) = -2+5i$. ¿Cuál es el valor de $f(1+6i)$?

(ii) Hallar la transformación bilineal $w = T(z)$ que aplica $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-4i| < 2\}$ en el semiplano $P = \{w = u+iv \in \mathbb{C}\,;\ v > u\}$ y es tal que $T(2i) = 0$ y $T(0) = -i$.

(iii) Se consideran las transformaciones:

$$T_1(z) = \frac{z}{5-z} \qquad , \qquad T_2(z) = \frac{-z}{z+1}$$

Sea S la imagen mediante T_1 de $A = \{z = x+iy\,,\ y > x\}$. Se pide hallar la imagen de S al aplicar la transformación T_2.

(iv) Una función bilineal compleja, de variable compleja, $w = f(z)$, transforma el círculo $|z| < 2$ en el círculo $|w| < 3$ cumpliendo además que $f(i) = 0$ y $\arg(f'(i)) = \pi/2$. Obtener el valor de $f(0)$.

(v) Encontrar la tansformación bilineal $T(z)$ que lleva el semiplano $\Im z > 0$ al círculo $|w| < 1$,de manera que $T(4i) = 0$ y el argumento de $T'(4i)$ sea igual a $3\pi/4$.

(vi) Hallar una transformación bilineal tal que la región $\Im(z) \geq 0$ se transforme en la región $|w| < 1$ y que haga corresponder al punto $z = 3i$ el $w = 0$ y a $z = \infty$ el $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

(vii) (a) Determinar la transformación bilineal $F(z)$ tal que: $F(\{z : |z| = 3\}) = \{w : |w| = 3\}$ y deja fijos los puntos $3i/2$ y 3.

(b) Dados $T(z) = (z-4)/(z+4)$ y $A = \{z : |z| = 4, \Im(z) \geq 0\}$, calcular $T(A)$.

(viii) Determinar la transformación bilineal T que lleva el semiplano $\{\Im z > 0\}$ al disco $\{|w-1| < 6\}$ y el punto i al 1 y es tal que la derivada en i es igual a 3.

(ix) Hallar la transformación bilineal $w = T(z)$ que aplique el semiplano $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \Re z > 0\}$ en el círculo $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |w-1| < 2\}$ sabiendo que $T(1) = 1$ y $T(0) = 1-2i$. Calcular $T(\mathbb{R})$.

(x) Encontrar la transformación bilineal $w = T(z)$ que lleva la circunferencia $\{z \in \mathbb{C};\, |z-4| = 2\}$ a la recta $\{w = u + iv;\, v = u\}$ y tal que $T(4) = 4$ y $T(2) = 0$. Hallar la imagen de la región $D = \{z \in \mathbb{C}\ 0 < \arg(z) < \pi/4\}$ mediante dicha transformación.

(xi) La transformación bilineal $T(z)$ transforma el semiplano $\{z = x + iy;\, y > x\}$ en el círculo $\{w \in \mathbb{C};\, |w-5| < 5\}$, y es tal que $T(i) = 5$ y $T(0) = 5 + i5$. ¿Puede ser una transformación lineal? Razonar la respuesta. Calcular $T(z)$ y $T\{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$.

(xii) (a) Calcular la transformación bilineal que transforma los puntos de recta $\{z = x + iy, x = y\}$ en los de la circunferencia $|w-1| = 1$, lleva el punto $2+i$ al punto ∞ y es tal que $T(0) = 2$.

(b) Obtener la transformada de $|z-1| = 1$ a través de la transformación obtenida.

(xiii) Encontrar la transformación bilineal T que transforma el círculo: $\{z \in \mathbb{C}, |z-2| \leq 2\}$, en el semiplano: $\{w = u + iv, u \leq v\}$ y es tal que $T(2) = 2i$ y $T'(z)$ tiene una singularidad en $z = 4$. Calcular $T(\{z = x + iy, x = 0\})$.

3.8

(i) Demostar que una transformación de Moebius que tiene tres puntos fijos en el plano complejo ampliado ha de ser la transformación $M(z) = z$.

(ii) Poner un ejemplo de una transformación de Moebius con un solo punto fijo y otro de una transformación con dos puntos fijos (en el plano complejo ampliado).

3.9

Calcular, mediante integración compleja, el valor de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 5x}{x^4 + 8x^2 + 16}dx$$
$$I_3 = \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+x+5)^2}dx \quad , \quad I_4 = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2+3^2}dx$$

Soluciones: $\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{16}e^{-10}$, $\frac{2\pi(\sqrt{19}+2)}{19\sqrt{19}}$ sen $\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{19}}{2}}$ y $\frac{\pi}{6}(1+e^{-6})$ respectivamente.